

Ein erstaunliches Schnur-Orakel

JOSCHA PROCHNO UND MICHAEL SCHMITZ, KIEL/FLENSBURG

Zusammenfassung: Anhand eines Schnur-Orakels wird gezeigt, wie ein stochastisches Problem auf natürliche Weise dazu anregen kann, weiterführende mathematische Fragen zu stellen und so verblüffende Ergebnisse zu erhalten. Der dargestellte Weg ist für interessierte und leistungsstarke Schülerinnen und Schüler bzw. für Studierende des Lehramts in den ersten Semestern konzipiert. Sie können dabei – neben den erstaunlichen Resultaten – typische Verfahrensweisen und Herausforderungen der Hochschulmathematik kennen lernen.

1 Einleitung

Man erzählt sich, dass junge Frauen früher ein einfaches Orakel nach ihrem Liebesglück befragt haben sollen. Das Orakel bestand aus drei gleich langen Schnüren, die man so in der Mitte fasste, dass jeweils zwei Enden frei herunter hingen. Nahm man alle drei Schnüre auf diese Weise in eine geschlossene Faust, so entstanden insgesamt sechs lose Enden, von denen man nicht wusste, welches zu welchem gehörte. Man knotete jetzt nacheinander je zwei Enden zusammen, so dass drei Knoten vorlagen. Dann öffnete man die Faust und betrachtete den ‘Orakelspruch’. Bildeten die drei Schnüre einen einzigen großen Ring, so würde man großes Glück in der Liebe erfahren.¹

Man fragt sich, ob es nicht äußerst unwahrscheinlich ist, durch das wahllose Zusammenknoten einen einzigen Ring zu erzeugen. Wir bestimmen im Folgenden die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

2 Das Orakel mit drei Schnüren

Wir betrachten die drei Verknotungen nacheinander. Bei jedem Knoten überlegen wir uns, ob danach noch die Chance besteht, dass insgesamt ein großer Ring entsteht, oder ob dies schon ausgeschlossen ist. Wenn wir bei der ersten oder zweiten Verknotung bereits einen Ring schließen, dann ist der große Ring nicht mehr zu erreichen. Andernfalls bleiben für die letzte Verknotung zwei lose Enden übrig, die dann zwangsläufig den großen Ring ergeben. Wir müssen also nur für die ersten beiden Knoten die Wahr-

scheinlichkeit dafür bestimmen, dass kein Ring geschlossen wird.

Erster Knoten: Wir betrachten drei unverknotete Schnüre.

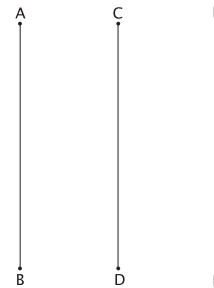


Abb. 1: Drei unverknotete Schnüre.

Wir wählen zuerst ein Ende aus, das wir verknoten wollen, z.B. A (es ist unerheblich welches Ende gewählt wird). Wir verknoten zufällig ein zweites Ende mit A. Erwischen wir B, ist ein kleiner Ring geschlossen – ein schlechter Fall. Bei jeder anderen Wahl (C bis F) kommt es nicht zu einem Ringschluss, so dass dieser Schritt „gut gegangen“ ist und weiter die Chance auf den großen Ring besteht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{4}{5}$, denn in vier Fällen (C, D, E, F) geht alles gut und nur in einem Fall (B) haben wir einen unerwünschten Ringschluss. Wir halten fest

$$P(\text{„Knoten 1 führt nicht zum Ringschluss“}) = \frac{4}{5}.$$

Zweiter Knoten: Abb. 2 stellt eine mögliche Ausgangssituation für den zweiten Knoten dar. Welche Enden zuvor miteinander verknotet wurden ist nicht entscheidend. Es kommt nur darauf an, dass nicht zwei Enden derselben Schnur zusammengeknotet wurden (in der Abbildung wurden A und C miteinander verknotet):

¹Die Autoren sind auf das hier vorgestellte Orakel in Wittmann (2001) gestoßen, wo ausschließlich ein Orakel mit drei Schnüren betrachtet wird. In Engel (1973) wird dasselbe Problem unter dem Titel „Die Heiratschancen der Mädchen in Anchurien“ behandelt. Es werden sogar drei Varianten betrachtet, von welchen das hier vorgestellte Orakel eine ist. Die Rechnungen und Argumente werden dort größtenteils nicht ausgeführt.

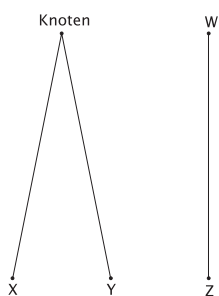


Abb. 2: Eine mögliche Situation nach dem ersten Knoten.

Zunächst ist man vielleicht der Meinung, dass es nun zwei Fälle zu unterscheiden gäbe, nämlich ob wir zum weiteren Verknoten eines der Enden W, Z der einzelnen Schnur oder eines der Enden X, Y der aus zwei Schnüren bestehenden längeren Schnur wählen. Dies ist aber irrelevant: In jedem Fall wählen wir das lose Ende einer von insgesamt zwei Schnüren. Es spielt keine Rolle, ob die gewählte vorher durch Verknotung von zwei anderen Schnüren entstanden ist oder nicht.²

Wir wählen z.B. das Ende X zum weiteren Verknoten aus. Nun greifen wir zufällig eines der anderen Enden (Y, W, Z). Wenn wir Y erwischen, ist ein Ring geschlossen und das Spiel ist aus. Haben wir W oder Z gewählt, sind wir weiter „im Rennen“. Es folgt

$$P(\text{„Knoten 2 führt nicht zum Ringschluss“})^3 = \frac{2}{3}.$$

Der dritte und letzte Knoten verdient keine Überschrift, denn in jedem Fall haben wir – vorausgesetzt die ersten beiden Schritte sind gut gegangen – jetzt nur noch 2 lose Enden, deren Verknotung zwangsläufig den großen Ring schließt. Insgesamt erhalten wir

$$P(\text{„großer Ring“}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

Dieses Ergebnis ist sicherlich bemerkenswert, denn es bedeutet, dass das Orakel im Schnitt häufiger als jedes zweite Mal großes Liebesglück verspricht. Vielleicht ist dies einer der Gründe, warum junge Frauen es früher so gerne befragt haben.

²Diese Überlegung ist auch für die später angestrebte Verallgemeinerung des Schnur-Orakels wichtig. Man mache sich klar, dass durch die Verknotung zweier Schnüre nur deren Anzahl um eins reduziert wird. Ansonsten ändert sich nichts.

³Genau genommen handelt es sich hier um die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2|E_1)$, wobei E_i das Ereignis „Knoten i führt nicht zu einem Ringschluss“ bezeichne. Aus Gründen der leichteren Lesbarkeit verzichten wir in der Folge auf die Notation bedingter Wahrscheinlichkeiten.

⁴Es sollte ein Ziel des Mathematikunterrichts sein, den Schülern zu vermitteln, ein erfolgreich behandeltes Problem stets dahingehend zu reflektieren, welche weiterführenden Fragen sich aus der Lösung ergeben. Der Lehrer muss seine Schüler für solche Fragen sensibilisieren und sie ermutigen, diese zu stellen. In Mason et al. (2008) wird dies unter dem Begriff „Rückschau“ als eine von drei Phasen des Problemlösens beschrieben. Ursprünglich stammt die Zerlegung des Problemlöseprozesses in Teilschritte von Pólya.

3 Das Orakel mit mehr als drei Schnüren

Es stellt sich die Frage, wie sich die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Orakelspruch verändert, wenn wir weitere Schnüre hinzunehmen.⁴ Intuitiv ist klar, dass die Chancen auf den großen Ring nur kleiner werden können; die eigentliche Frage ist also, wie stark sich die Wahrscheinlichkeit mit steigender Anzahl an Schnüren vermindert.

3.1 Das Orakel mit vier Schnüren

Bei vier Schnüren gibt es drei Verknotungen, die wir betrachten müssen: Schließen wir bei den ersten drei Schritten jeweils keinen Ring, so erhalten wir den großen Ring bei der letzten Verknotung zwangsläufig.

Erster Knoten: Es liegen acht lose Enden vor. Wenn wir eines zum Verknoten wählen, so ist ein Ringschluss nur auf eine Weise möglich; nämlich indem wir zufällig das andere Ende derselben Schnur damit verknoten. Bei allen anderen sechs Enden bleiben wir im Rennen. Wir erhalten

$$P(\text{„Knoten 1 führt nicht zum Ringschluss“}) = \frac{6}{7}.$$

Weitere Knoten: Durch den ersten Schritt hat sich die Anzahl der Schnüre um eins vermindert, denn durch das Verknoten von zwei Schnüren, ist eine neue, längere Schnur entstanden (s.o.). Ab jetzt haben wir es also mit einem Orakel zu tun, das aus drei Schnüren besteht. Wir kennen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von nun an „alles gut geht“: Sie beträgt $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$. Es folgt:

$$P(\text{„großer Ring“}) = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}.$$

Wie erwartet ist die Chance auf die große Liebe bei einem Orakel mit vier Schnüren geringer, aber erstaunlicherweise nur unwesentlich. Sie liegt nach wie vor in der Nähe von 50%.

3.2 Das Orakel mit n Schnüren

Betrachten wir die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten, so sehen wir eine Regelmäßigkeit. Zur Verkürzung der Schreiarbeit sei p_n die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Orakel mit n Schnüren einen großen Ring zu erhalten. Es soll nun unser Ziel sein, p_n auf möglichst einfache Weise zu berechnen. Wir haben bisher eingesehen, dass

$$p_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad p_4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

gilt. Eine nahe liegende Vermutung ist

$$p_5 = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \quad p_6 = \frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3},$$

sowie für das Orakel mit n Schnüren

$$p_n = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}. \quad (1)$$

Wir wollen die Vermutung bestätigen.⁵ Wenn das Orakel aus n Schnüren besteht, dann haben wir im ersten Schritt $2n$ lose Enden. Wir nehmen ein beliebiges davon und verknöten es mit einem zufällig gewählten der verbleibenden $(2n-1)$ Enden. Von diesen führt nur eines (nämlich das andere Ende der zuerst gegriffenen Schnur) zu einem Ringschluss. Bei den restlichen $(2n-2)$ Möglichkeiten geht alles gut, d.h.

$$P(\text{„Knoten führt nicht zum Ringschluss“}) = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

Für die folgenden Schritte müssen wir nicht neu überlegen, denn wir haben es nun mit einem Orakel aus $(n-1)$ Schnüren zu tun. Daher gilt

$$p_n = \left(\frac{2n-2}{2n-1} \right) \cdot p_{n-1}. \quad (2)$$

Das Produkt p_{n-1} beginnt mit dem Faktor

$$\frac{2(n-1)-2}{2(n-1)-1} = \frac{2n-4}{2n-3}.$$

Die Überlegung lässt sich mehrfach wiederholen und bestätigt Formel (1).

Wir haben also die rekursive Formel (2) sowie die Produktformel (1) für p_n gefunden und können nun einige weitere Werte berechnen. So gilt z.B.

$$p_5 = \frac{128}{315} = 40,63 \dots \% \\ p_6 = \frac{256}{693} = 36,94 \dots \%$$

⁵Wir führen eine plausible Argumentation als Begründung durch und verzichten auf einen formalen Beweis. Dahinter verbirgt sich eine vollständige Induktion. Das Argument ist jedoch klar, so dass eine exakte Durchführung der Induktion hier nicht bereichernd wäre.

Diese Ergebnisse sind erstaunlich. Bei einem Orakel mit sechs Schnüren – also mit zwölf losen Enden – beträgt die Chance auf die zufällige Bildung eines einzigen Ringes beachtliche 37%. Wer hätte das erwartet? Unsere Beobachtungen werfen die Frage auf, wie groß die Wahrscheinlichkeit auf das große Glück bei einem Orakel mit wirklich vielen (z.B. 100) Schnüren ist. Ist die Chance praktisch gleich Null, oder können wir selbst bei 200 losen Enden noch darauf hoffen, den großen Ring zufällig zu erhalten?

4 Herleitung einer geschlossenen Formel

Wir betrachten Formel (1) noch einmal genauer. Mit dem Produktzeichen ausgedrückt lautet sie

$$p_n = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2(n-j)}{2(n-j)+1}.$$

Da die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle spielt, können wir das Produkt ebenso gut „umgekehrt“ aufschreiben und erhalten

$$p_n = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1}. \quad (3)$$

Das Produktzeichen lässt die Formel handlich erscheinen, in Wirklichkeit ist sie aber unpraktisch. Wir haben es hier nach wie vor mit $(n-1)$ Faktoren zu tun, welche wir bei einer konkreten Berechnung alle einzeln (z.B. in den Taschenrechner) eingeben müssten.

Eine Betrachtung des Zählers von (3) sowie die Tatsache

$$(n-1)! = \prod_{j=1}^{n-1} j$$

legen die Idee nahe, den gesamten Ausdruck mit Hilfe von Fakultäten zu formulieren.

Wir führen die Herleitung in zwei Varianten durch. Die erste zeigt ein exemplarisches Beispiel, anhand dessen die entscheidenden Ideen klar zu erkennen sind. Diese Version eignet sich z.B. für die Umsetzung im Unterricht. Die zweite Variante ist exakter und eher für den universitären Einsatz geeignet.

Schulvariante

Wir betrachten ein Orakel mit 5 Schnüren. Es gilt

$$p_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}.$$

Um im Zähler eine Fakultät zu erzeugen, ziehen wir aus jedem Faktor eine 2 heraus:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} &= \frac{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \\ &= 2^4 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = 2^4 \cdot \frac{4!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}. \end{aligned}$$

Um den Nenner zu einer vollständigen Fakultät zu ergänzen, erweitern wir mit den fehlenden geraden Zahlen:

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot \frac{4!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} &= 2^4 \cdot \frac{4!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\ &= 2^4 \cdot \frac{4! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \\ &= 2^4 \cdot \frac{4! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{9!}. \end{aligned}$$

Wie oben ziehen wir im Zähler erneut aus jedem der Faktoren eine 2 heraus und erhalten

$$p_5 = 2^8 \cdot \frac{4! \cdot 4!}{9!}.$$

Wir hätten dieselbe Rechnung auch für beliebiges n anstelle von 5 durchführen können. In diesem Fall erhalten wir

$$p_n = 2^{2n-2} \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1)!}. \quad (4)$$

Formale Variante

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1} \\ &= 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j}{2j+1} \\ &= 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{\prod_{j=1}^{n-1} (2j+1)} \\ &= 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{\prod_{j=1}^{n-1} (2j+1)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1} 2j}{\prod_{j=1}^{n-1} 2j} \\ &= 2^{2n-2} \frac{(n-1)!(n-1)!}{\prod_{j=1}^{n-1} (2j+1) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} 2j} \\ &= 2^{2n-2} \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1)!}. \end{aligned}$$

⁶Versuchen Sie es! Die Rechenleistung eines Taschenrechners reicht nicht aus, um z.B. $100!$ zu bestimmen.

⁷Mit \ln bezeichnen wir hier den natürlichen Logarithmus, d.h. den Logarithmus zu Basis e .

Diskussion

Formel (4) stellt einen griffigen, geschlossenen Ausdruck für p_n dar. Für eine konkrete Berechnung (z.B. mit dem Taschenrechner) müssen nicht mehr alle Faktoren eingegeben werden, sondern lediglich die entsprechenden Fakultäten. Der Versuch z.B. p_{100} auf diese Weise zu berechnen, scheitert allerdings.⁶ Dies ist nicht verwunderlich, denn wir haben das Produkt nicht beseitigt, sondern lediglich durch eine Notation (Fakultät) abgekürzt ausgedrückt.

Weitere Anstrengungen, den exakten Wert von p_n für große n zu bestimmen, sind wenig Erfolg versprechend. Wir werden uns daher im folgenden Abschnitt mit der näherungsweise Bestimmung von p_n befassen und damit eine Antwort auf die Frage nach dem Wachstumsverhalten von p_n erhalten.

5 Näherungsformeln

Ein probates Hilfsmittel, um die Größe eines Produkts abzuschätzen, ist der Logarithmus. Das liegt an der für alle positiven reellen Zahlen a, b gültigen Rechenregel

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b).^7 \quad (5)$$

Aufgrund dieser Identität, können wir den Logarithmus verwenden, um Produkte in Summen zu verwandeln. Mit (3) und (5) erhalten wir

$$\ln(p_n) = \ln \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1} \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(\frac{2j}{2j+1} \right).$$

Wir betrachten nun die einzelnen Summanden. Dabei hilft uns eine weitere Eigenschaft des Logarithmus, nämlich

$$\ln \left(\frac{a}{b} \right) = -\ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

Wir wenden diese an und erhalten

$$\ln(p_n) = -\sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(\frac{2j+1}{2j} \right) = -\sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{2j} \right).$$

Bis hierhin haben wir exakt gerechnet. Nun werden wir eine Standard-Näherung für den Logarithmus verwenden. Wir betrachten dazu die Funktionen

$x \mapsto \ln(1+x)$ und $x \mapsto x$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem für x nahe Null.

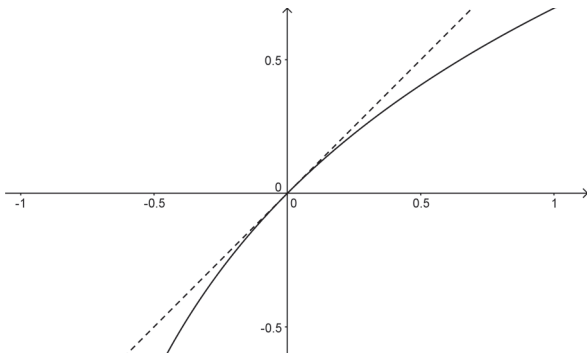


Abb. 3: $x \mapsto x$ und $x \mapsto \ln(1+x)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem nahe Null.

Wir sehen, dass für kleine x die Tangente $x \mapsto x$ eine Näherung für $x \mapsto \ln(1+x)$ darstellt. Wir wollen diese Approximation für die Summanden

$$\ln(1+x_j) \quad \text{mit} \quad x_j = \frac{1}{2j} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

aus der obigen Formel anwenden. Für $j = 1$ ist x_j maximal, nämlich $x_1 = \frac{1}{2}$. Für größeres j ist x_j stets kleiner, da der Nenner des Bruches größer wird. Wir können $\ln(1+x_j) \approx x_j$ also als sinnvolle Näherung⁸ ansehen und erhalten

$$\ln(p_n) = - \sum_{j=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{2j} \right) \approx - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j} = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Wir verwenden nun eine weitere Standard-Näherung. Die Summe $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$ lässt sich durch den geschlossenen Ausdruck $\ln(n-1)$ abschätzen:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cdot 1 \approx \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx = \ln(n-1) - \ln(1) = \ln(n-1).$$

Der Ausdruck $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cdot 1$ stellt eine Obersumme dar und entspricht daher ungefähr dem Integral. Dieses lässt sich leicht ermitteln, da der Logarithmus eine Stammfunktion zu $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist. Damit erhalten wir

$$\ln(p_n) = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \approx - \frac{1}{2} \ln(n-1).$$

⁸Was genau eine sinnvolle Näherung ist, wollen wir hier nicht diskutieren. Das Zeichen \approx verwenden wir an dieser Stelle etwas fahrlässig, ohne eigentlich definiert zu haben, was es bedeuten soll. Um einen groben Eindruck von der Größe von p_n zu gewinnen, soll uns das zunächst genügen.

⁹Einen einfachen Beweis findet man z. B. unter <http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/pukelsheim/2002f.pdf>.

¹⁰Das Zeichen \sim ist (im Gegensatz zu \approx weiter oben) genau definiert. Und zwar bedeutet $a_n \sim b_n$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt; in unserem Fall also $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}} = 1$.

Dies sieht bereits recht handlich aus. Wir interessieren uns eigentlich für den Wert von p_n und nicht von $\ln(p_n)$. Daher gehen wir nun zurück, indem wir auf beiden Seiten die Exponentialfunktion anwenden. Es folgt

$$p_n \approx e^{-\frac{1}{2} \ln(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{e^{\ln(n-1)}}}.$$

Da $e^{\ln(n-1)} = n-1$ ist, erhalten wir die wunderbar einfache Näherungsformel

$$p_n \approx \frac{1}{\sqrt{n-1}}. \quad (6)$$

Nun können wir wirklich leicht ausrechnen (sogar ohne Taschenrechner), wie die Chancen auf die große Liebe ungefähr stehen, wenn das Orakel aus sehr vielen Schnüren besteht. Für ein Orakel mit 101 Schnüren (also 202 losen Enden!) gilt z.B.

$$p_{101} \approx \frac{1}{\sqrt{100}} = 10\%.$$

Dieses Ergebnis ist mehr als erstaunlich: Um bei diesem „Riesen-Orakel“ einen großen Ring durch Zufall zu erhalten, braucht man im Durchschnitt nur ca. zehn Versuche! Selbst bei einem Orakel mit unvorstellbaren 10.001 Schnüren (also 20.002 losen Enden) besteht noch die reelle Chance von

$$p_{10.001} \approx \frac{1}{\sqrt{10.000}} = \frac{1}{100} = 1\%.$$

So schön diese Rechnungen von der Hand gehen, müssen wir uns trotzdem eines vor Augen halten: Die Einfachheit geht auf Kosten der Genauigkeit. An zwei Stellen haben wir Näherungen verwendet, ohne uns über die Größe des Fehlers Gedanken zu machen.

5.1 Eine bessere Näherung

Um eine bessere Näherung zu erhalten, verwenden wir die **Stirling-Formel**⁹. Diese besagt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}.^{10}$$

Wir erweitern zunächst (4) mit $2n$ und erhalten

$$p_n = \frac{2^{2n-2} (n-1)! (n-1)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{2^{2n-1} (n-1)! n!}{(2n)!}.$$

Nun wenden wir die Stirling-Formel an. Es folgt

$$p_n \sim \frac{2^{2n-1} \sqrt{2\pi(n-1)} (n-1)^{n-1} e^{-n+1} \sqrt{2\pi n n^n} e^{-n}}{\sqrt{2\pi 2n} (2n)^{2n} e^{-2n}}.$$

Wir sortieren, kürzen und erhalten:

$$p_n \sim 2^{-1} \sqrt{\pi(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot e.$$

Nun erweitern wir den Bruch mit $(n-1)$. Es folgt

$$\begin{aligned} p_n &\sim 2^{-1} \sqrt{\pi(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \cdot e \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot e. \end{aligned}$$

Wir erkennen noch, dass

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim e^{-1}$$

gilt und erhalten

$$p_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}. \quad (7)$$

Vergleich der zwei Näherungen

In Formel (6) wird das Zeichen \approx verwendet. Wir sind jedoch nicht darauf eingegangen, was es eigentlich aussagen soll. Na klar, wir meinen, dass der Wert auf der linken Seite mit dem auf der rechten Seite bis auf einen gewissen Fehler übereinstimmt. Über dessen Größe wissen wir allerdings nichts. Wir wollen uns daher anhand konkreter Zahlen einen Eindruck von der Güte der Approximationen (6) und (7) verschaffen. Die folgende Tabelle zeigt die nach (3) exakt berechneten Werte für p_n neben den nach (6) bzw. (7) berechneten Näherungswerten.

n	p_n exakt	$p_n \approx \frac{1}{\sqrt{n-1}}$	$p_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n-1}}$
3	0,533...	0,707...	0,626...
4	0,457...	0,577...	0,511...
5	0,406...	0,500	0,443...
50	0,125...	0,142...	0,126...
100	0,088...	0,100...	0,089...
1000	0,028...	0,031...	0,028...

Diskussion

Wir sehen, dass Näherung (6) für kleine n ziemlich schlecht ist und auch für größere n nur einen Eindruck von der Größenordnung liefern kann. Selbst für $n = 1000$ weicht die Approximation um mehr als 10% vom tatsächlichen Ergebnis ab. Das ist wirklich grob.

Es ist auffällig, dass sich die beiden Näherungsformeln (6) und (7) nur um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ unterscheiden. Wie wir in der obigen Tabelle allerdings gesehen haben, verbessert sich die Approximation hierdurch wesentlich. Dies liegt darin begründet, dass die Stirling-Formel eine asymptotische Näherung liefert.

6 Abschlussbemerkungen

Das vorgestellte Orakel eignet sich in besonderem Maße für den Einsatz in Schule und Universität, da es ein breites Spektrum von Anspruchsniveaus bereithält. Das Ausgangsproblem ist auch für jüngere Schüler verständlich und kann z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms ohne weitere Begriffe gelöst werden. Die „Rückschau“ (s.o.) wirft die Frage nach einer Verallgemeinerung auf mehr als drei Schnüre in natürlicher Weise auf. Ab hier kann „beliebig weit“ mit den Lernenden gegangen werden. Das Thema wurde im Rahmen einer Schülerakademie bereits mit Schülern aus den Klassen 8 bis 13 mit viel Freude auf beiden Seiten durchgeführt.

Danksagung

Wir danken den anonymen Referees sowie unseren Kollegen Carsten Schütt und André Streicher für hilfreiche Anregungen und Verbesserungsvorschläge.

Literatur

- Engel, A. (1973): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
 Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2008): Mathematisch denken. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
 Wittmann, J. (2001): Mathematische Tricks und Bassteilen. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Anschriften der Verfasser

Dr. Joscha Prochno

Mathematisches Seminar

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Ludewig-Meyn-Str. 4, 24098 Kiel

prochno@math.uni-kiel.de

und

Department of Mathematical and Statistical Sciences

University of Alberta

605 Central Academic Building

Edmonton T6G 2G1, Canada

prochno@ualberta.ca

Michael Schmitz

Institut für Mathematik und ihre Didaktik

Universität Flensburg

Auf dem Campus 1, 24943 Flensburg

michael.schmitz@uni-flensburg.de